QCM - VRAI - FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \cos\left(\pi x^2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

☐ $x \mapsto 2\pi \sin\left(\pi x^2\right)$. ☐ $x \mapsto 2\pi x \sin\left(\pi x^2\right)$. ☐ $x \mapsto -2\pi x \sin\left(\pi x^2\right)$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $[-2, 2]$ dont le tableau de variation de f' est le suivant.

x	-2		-1		0		1		2
f'	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{-1}{4}$

• Alors

☐ $f(-2) < f(-1)$. ☐ $f(-1) < f(0)$. ☐ $f(0) < f(1)$.

• Dans un repère orthogonal, la courbe de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation

☐ $y = -\frac{1}{2}$. ☐ $y = \frac{1}{2}x$. ☐ $y = -\frac{1}{2}x$.

3. L'image de $[1, +\infty[$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} - 1$ est

☐ $]0, +\infty[$. ☐ $[-1, +\infty[$. ☐ $]-\infty, 0]$.

4. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{20}x^5 - 4x^2$ admet un point d'inflexion d'abscisse

☐ $x = 0$. ☐ $x = -2$. ☐ $x = 2$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

La courbe de f dans un repère orthogonal admet exactement

☐ deux tangentes horizontales. ☐ une tangente horizontale. ☐ aucune tangente horizontale.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction dérivable sur $[-1, 2]$ telle que $f(-1) = 2$, $f(2) = -1$.

Alors l'équation $f'(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[-1, 2]$.

2. Si le produit de deux fonctions est dérivable en un réel a alors chacune des deux fonctions est dérivable en a.

3. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \left(x^2 - x\right)(x-2)$ admet exactement deux tangentes horizontales.

4. Soit f une fonction dérivable sur $[2, 5]$ telle que $|f'(t)| \leq 2$ pour $t \in [2, 5]$.

Alors $|f(5) - f(2)| \leq 6$.

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Déterminer, dans chacun des cas suivants, une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

1. $f : x \mapsto (x-1)^2(x-3)$, $a = 2$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{2x^4}{(x+2)^2}$, $a = -1$.
3. $f : x \mapsto x\left(2\sqrt{x}-3\right)$, $a = 4$.
4. $f : x \mapsto \cos^3 x + \sin x$, $a = \dfrac{\pi}{6}$.

2 1. Donner une approximation affine de $\dfrac{1}{(1+h)^2}$ pour h voisin de 0.

2. En déduire une estimation des réels $\dfrac{1}{(1.0000000002)^2}$ et $\dfrac{1}{(0.9999999998)^2}$.

3 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto 3x^{10} - \dfrac{5}{4}x^8 + 3x - 10$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \left(1 - x - 3x^3\right)(x+2x)^3$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-x}$, $I =]1, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$, $I = [1, +\infty[$.
5. $f : x \mapsto \cos(3x) - \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$, $I =]0, \pi]$.
7. $f : x \mapsto (1+\sin(2x))^3$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$, $I = [0,1[$.
9. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $I =]1, +\infty[$.
10. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$, $I =]0, +\infty[$.

4 Déterminer, dans chacun des cas, les dérivées successives de la fonction f.

1. $f : x \mapsto x^5 - 2x^3 + 3x + 4$.
2. $f : x \mapsto \cos x$.
3. $f : x \mapsto \sin(2x)$.

5 Déterminer une fonction polynôme f de degré 3 telle que $f(1) = f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = 1$.

6 1. Calculer les dérivées d'ordre 3 des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par $h(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

a. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,

$$h(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}.$$

b. En déduire la dérivée d'ordre 3 de la fonction h.

7 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3$.

Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f\left(\sqrt{2+x}\right)}{x-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f\left(2\sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)}{x-2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin\left(f(x)\right)}{x-2}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f\left(x^2+x+2\right)}{x}$.

8 Vérifier, dans chacun des cas suivants, que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $I =]0, +\infty[$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$, $I =]0, \dfrac{\pi}{2}]$.

3. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $I = [1, +\infty[$.

4. $f : x \mapsto \tan(\sin x)$, $I = \mathbb{R}$.

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

1. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{1}{10}]$, $0 \leq f'(x) \leq 1.234$.

2. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{1}{10}]$, on a $1 \leq f(x) < 1 + 1.234x$.

3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-8} de $f(0.0000000011)$.

10 Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ et que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1 - \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 1$.

3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-10} de $f(0.0000000002)$.

11 Montrer que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, pour tous réels x et y.

12 1. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y - x)$, pour tous x et y de $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, $x < y$.

2. En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$.

13 Soit f la fonction définie sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan x} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montrer que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $-2 \leq f'(x) \leq -1$.

3. En déduire que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1 - \tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$.

14 1. a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \leq \tan x$.

b. En déduire que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. a. Montrer que $\frac{y - x}{\cos^2 x} \leq \tan y - \tan x \leq \frac{y - x}{\cos^2 y}$, pour tous réels x et y de $[0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $x < y$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \leq \tan x \leq \frac{x}{\cos^2 x}$.

c. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$.

3. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

15 On considère une fonction f dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0)=f'(0)=0$ et $f(1)=0$.

Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.

2. a. Montrer qu'il existe un réel c de $]0, 1[$ tel que $cf'(c)-f(c)=0$.

b. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.
Montrer que $\mathscr{C}$ possède au moins une tangente passant par l'origine du repère.

16 Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y=x^2+ax+b$ dans un repère orthogonal.
Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{P}$, d'abscisses respectives x_A et x_B.

Montrer que $\mathscr{P}$ possède au point d'abscisse $\dfrac{x_A+x_B}{2}$ une tangente parallèle à la droite (AB).

17 Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$.

1. Montrer que si la courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points distincts, alors elle admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. Montrer que si la courbe de f coupe l'axe des abscisses en n points distincts $(n\geq 2)$, alors elle admet au moins $n-1$ tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

18 Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-1)^3(x^4-16)^2$.

Montrer que la dérivée f' de f admet au moins trois racines distinctes autres que les réels -2, -1, 1 et 2.

19 Soit f une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annulant pour $n+1$ valeurs distinctes de $[a, b]$ $(n\geq 1)$.

Montrer que sa dérivée $n^{ème}$ s'annule au moins une fois dans $[a, b]$.

20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0,\\ x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0.\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que pour tout réel x non nul on a $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leq|x|$.

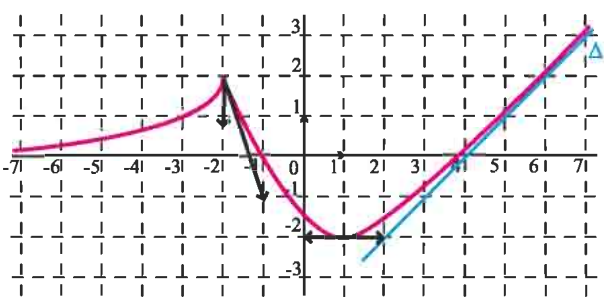
b. En déduire que f est dérivable en 0.
3. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

b. Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $\left|f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)\right|$.

c. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

21 On a représenté ci-dessous, une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite Δ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer graphiquement,

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2},\quad \lim_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+4\right).$$

22 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f: x\mapsto 4x^3+6x-2$.

23 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f: x\mapsto \dfrac{x^3+2x+2}{2x}$

24 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

25 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x+3}$.

26 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto 5x+3\sqrt{x^2-1}$.

27 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x+\sqrt{4-x^2}$.

28 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^2 x+\cos x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que 2π est une période de f.
b. Montrer que la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f.
2. a. Etudier les variations de f.
b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $[0,\pi]$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
c. Tracer la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi,2\pi]$.

30 I. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

II. Soit la fonction $h : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{(\sin x-1)^2}$ et on désigne par C_h sa courbe dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
b. Vérifier que 2π est une période de h.
c. Montrer que la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour C_h.
2. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} h(x)$.
b. En écrivant $h=f\circ\sin$, déduire le sens de variation de h sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
c. Résoudre l'équation $h'(x)=0$.
d. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de C_h.
3. Tracer C_h.

31 1. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x(x+1)}{x-2}$.

2. Déterminer graphiquement, suivant les valeur de m, le nombre de solutions de l'équation $x^2+(1-m)x+2m=0$.

3. Déterminer graphiquement, suivant les valeur de m, le nombre de solutions de l'équation $\cos^2 x+(1-m)\cos x+2m=0$ dans $[0,2\pi[$.

32 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sin x+\frac{1}{2}\sin(2x)$.

33 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x}{2\cos x-1}$.

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\left|x^2+x\right| & \text{si } x<0,\\ x\sqrt{x} & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -1.
3. Etudier f et tracer C_f.

35 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3+3x^2+1$.

a. Etudier les variations de g.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et donner une valeur approchée de α à 10^{-1} prés.

c. En déduire le signe de g.

2. Soit la fonction $f: x \mapsto \dfrac{x+x^3}{1-x^3}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a. Etudier les variations de f.

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

c. Préciser la position de C_f par rapport à T.

d. Tracer C_f et T.

36 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3+x-2$.

a. Dresser le tableau de variation de g.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

d. Déterminer le signe de g.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^4+(x-2)^2}$.

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

b. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe C_f de f dans un repère orthogonal.

c. Déterminer graphiquement l'intersection de C_f et de la droite d'équation $y=x$.

37 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur à 1 par $u_n=1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{n^3}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

a. Montrer que pour tout k de $[1,+\infty[$, $\dfrac{2}{(k+1)^3} \le f(k)-f(k+1) \le \dfrac{2}{k^3}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur à 1, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n^2} \le u_n \le \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2n^2}$.

c. En déduire que (u_n) est majorée.

d. En déduire que (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

38 Soit f la fonction définie sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\tan x$.

1. a. Etudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, en précisant la demi tangente au point d'abscisse 0.

b. Montrer que pour tout réel x de $[0,\dfrac{\pi}{2}[$, $\tan(x) \ge x$.

2. a. Montrer que l'équation $\tan x = 2x$ admet une unique solution α dans $]0,\dfrac{\pi}{2}[$ et vérifier que $\alpha > \dfrac{\pi}{3}$.

b. Déterminer le signe de $\tan x - 2x$ sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=\dfrac{\pi}{3}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\tan(u_n)-u_n$.

a. Montrer que $0 \le u_n \le \dfrac{\pi}{3}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

39 Pour tout entier $n \ge 1$, on considère l'équation $(E_n): x^2+x^3=n$.

1. Montrer que pour tout entier $n \ge 1$, l' équation (E_n) a une solution unique que l'on notera a_n.

2. a. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b. Montrer que la suite (a_n) n'est pas majorée.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

40 I. Soit la fonction $f : x \mapsto \sin x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Représenter la restriction de f à $[-\pi,3\pi]$.

b. Soit A et B deux points distincts de C_f. Montrer que le coefficient directeur de la droite (AB) est compris entre -1 et 1.

II. Soit la fonction $g : x \mapsto \sin(\sin x)$ et C_g sa courbe représentative.

1. a. Montrer que 2π est une période de g.

b. Montrer que g est impaire.

c. Etudier les variations de g sur $[0,\pi]$.

d. Représenter la restriction de g à $[-\pi,2\pi]$.

41 I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{|x^2 - x|}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que C_f admet deux branches paraboliques dont on précisera les directions.

2. a. Montrer que f est dérivable en 0.

b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement le résultat.

3. a. Etudier les variations de f.

b. Tracer C_f.

4. Soit g la restriction de f à $[0,1]$, déterminer les extrema locaux de g.

II. Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $g_n(x) = x^n\sqrt{x(1-x)}$ et C_n sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la courbe C_n est au dessous de la courbe C_1.

2. a. Etudier la dérivabilité de g_n à droite en 0 et à gauche en 1.

b. Montrer que la fonction g_n est dérivable sur $]0,1[$ et que $g_n'(x) = \dfrac{x^n\left(n+\frac{1}{2}-(n+1)x\right)}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x \in]0,1[$.

c. En déduire que pour tout entier non nul n, la fonction g_n admet un maximum local α_n que l'on précisera.

d. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = g_n(\alpha_n)$, $n \geq 1$.

a. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq g_1(\alpha_n)$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

42 1. Montrer que l'équation $(E) : x^3 - 10x^2 - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution a et vérifier que $a \in]10,11[$.

2. Vérifier que (E) est équivalente à $x = 10 + \dfrac{1}{x^2}$.

3. Soit f la fonction définie sur $[10,+\infty[$ par $f(x) = 10 + \dfrac{1}{x^2}$.

a. Déterminer $f([10,+\infty[)$.

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Montrer que $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{500}|u_n - a|$.

Déterminer les six premières décimales de a.

QCM :

1. $f(x)=\sin(\pi x^2)\Rightarrow f'(x)=2\pi x.\cos(\pi x^2)$
2. a/ $f(-2)<f(-1)$

   b/ $y=-\frac{1}{2}x$
3. $f([1,+\infty[)=[-1,+\infty[$
4. $x=2$
5. (ζ_f) admet deux tangentes horizontales

VRAI – FAUX :

1. (VRAI) f est continue sur [-1,2] et dérivable sur]-1,2[alors d'après le théorème des accroissement fini il existe au moins un réel $c\in]-1,2[$ tel que $f(2)-f(-1)=f'(c)(2-(-1))\Leftrightarrow f'(c)=-1$
2. (FAUX)

   Contre exemple : $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x$

   $h(x)=(f.g)(x)=x\sqrt{x}$ h est dérivable en 0 mais f n'est pas dérivable à droite en 0
3. (VRAI)

   $f'(x)=3x^2-6x+2$ $\Delta'=3>0$ alors l'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions distinctes (Rq :on pourra utiliser le th acc fini)
4. (vrai) f est dérivable sur [2,5] et $|f'(t)|\le 2\ \forall t\in[2,5]$ alors d'après le th des inégalités des Accroissement finis :

$$|f(5)-f(2)|\le 2\times(5-2)\Rightarrow$$

$$|f(5)-f(2)|\le 6$$

EX 1 :

1. $f(x)=(x-1)^2.(x-3)$

   $f'(x)=2.(x-1).(x-3)+(x-1)^2$

   $f'(2)=-1$ et $f(2)=-1$

   $T: y=-1.(x-2)+(-1)$

   $T: y=-x+1$
2. $f(x)=\frac{2x^4}{(x+2)^2}$ $f'(x)=\frac{4x^4+16x^3}{(x+2)^3}$

   $f(-1)=2$ et $f'(-1)=-12$

   $T: y=-12(x+1)+2$

   $T: y=-12x-10$
3. $f(x)=x.(2\sqrt{x}-3)\Rightarrow$

   $f'(x)=2\sqrt{x}-3+\sqrt{x}=3\sqrt{x}-3$

   $f(4)=4$ et $f'(4)=3$

   $T: y=3x-8$
4. $f(x)=\cos^3(x)+\sin(x)$

   $f'(x)=-3\sin(x)\cos^2(x)+\cos(x)$

   $f'(\frac{\pi}{6})=\frac{4\sqrt{3}-9}{8}$ et $f(\frac{\pi}{6})=\frac{4+3\sqrt{3}}{8}$

   $T: y=\left(\frac{4\sqrt{3}-9}{8}\right).(x-\frac{\pi}{6})+\frac{4+3\sqrt{3}}{8}$

EX 2: Soit $f(x)=\frac{1}{x^2}\rightarrow f'(x)=\frac{-2}{x^3}$

f est dérivable en 1et $f'(1)=-2$

$f(1)+f'(1).h$ est une approximation de $f(1+h)$ Donc

1-2h est une approximation de $\frac{1}{(1+h)^2}$

*$1-2.(2.10^{-10})=0,0000000006$ est une approximation de

$$\frac{1}{(1,0000000002)^2}=\frac{1}{(1+2.10^{-10})}$$

* même travail pour $h=-2.10^{-10}$ donne $1,0000000004$ est une approximation de

$$\frac{1}{0,9999999996}$$

EX 3 :

1. $f(x)= 3x^{10}-\frac{5}{4}x^8+3x-10$ f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur IR et $f'(x)=30x^9-10x^7+3$
2. $f(x)=(1-x-3x^3)(x^2+2x)^3$ f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur IR et
   $f'(x)= (-1-9x^2)(x^2+2x)^3+ 3(2x+2)(x^2+2x)^2(1-x-3x^3)$
   (à simplifier ...)
3. $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$ Comme étant fonction rationnel f est dérivable sur $D_f=IR\setminus\{1\}$ et en particulier sur $]1,+\infty[$
   $f'(x)=\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$
4. $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}$ Comme étant fonction rationnel f est dérivable sur $D_f=IR^*$ et en particulier sur $[1,+\infty[$
   $f'(x)=1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-3x-2}{x^3}$
5. les fonctions $x\mapsto\cos(3x)$ *et* $x\mapsto\sin(2x)$ sont dérivables sur IR d'où f est dérivable sur IR et
   $f'(x)= -3\sin(3x)-2\cos(2x)$
6. $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ La fonction $x\mapsto 1-\cos x$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0,\pi[$ donc f est dérivable sur $]0,\pi[$ comme étant le quotient de deux fonctions dérivables
   $f'(x)=\frac{-1}{1-\cos x}$
7. $f(x)= (1+\sin(2x))^3$ f est dérivable sur IR comme étant la puissance d'une fonction dérivable
   $f'(x)= 6\cos(2x).[1+\sin(2x)]^2$
8. $f(x)=\tan^2(\frac{\pi}{2}x)$
   la fonction $u: x\mapsto\frac{\pi}{2}x$ est dérivable sur $[0,1[$ et $u([0,1[)= [0,\frac{\pi}{2}[$ et comme la fonction tangente est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}$
   Alors f est dérivable sur $[0,1[$ comme étant la composé de deux fonctions dérivables et
   $f'(x)=2.\tg(\frac{\pi}{2}x).[\frac{\pi}{2}.(1+\tan^2(\frac{\pi}{2}x))]$
   $=\pi.\tg(\frac{\pi}{2}x).[1+\tan^2(\frac{\pi}{2}x)]$
9. $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
   la fonction $x\mapsto\frac{x-1}{x+1}$ est dérivable et strictement positive sur $]1,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme étant la composé de deux fonctions dérivables et
   $f'(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$
10. $x\mapsto\sqrt{x}-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
    $x\mapsto\sqrt{x}+2$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant le quotient de deux fonctions dérivables et
    $$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+2)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)^2}$$
    $$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}.(\sqrt{x}+2)^2}$$

EX 4 :

1. $f(x)= x^5-2x^3+4$
   $f'(x)= 5x^4-6x^2$
   $f''(x)=20x^3-12x$
   $f^{(3)}(x)=60x^2-12$
   $f^{(4)}(x)=120x$
   $f^{(5)}(x)=120$
   $f^{(n)}(x)=0$ pour $n>5$
2. $f(x)=\cos x$
   $f'(x)=-\sin x$
   $f''(x)=-\cos x$
   $f^{(3)}(x)=\sin x$

   $f^{(2n)}(x)=(-1)^n.\cos x$
   $f^{(2n+1)}(x)=(-1)^{n+1}.\sin x$
   (on peut faire une démonstration par récurrence)
3. $f(x)=\sin(2x)$

   $f^{(2n)}(x)=(-1)^n.2^{2n}.\sin(2x)$
   $f^{(2n+1)}(x)=(-1)^n.2^{2n+1}.\cos(2x)$

EX 5 : $f(x)=a.x^3+b.x^2+c.x+d$
$f'(x)=3a.x^2+2b.x+c$
$f''(x)=6a.x+2b$
$f'''(x)=6a$

$f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 3a+2b+c=1 \\ 6a+2b=1 \\ 6a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=0 \\ c=\frac{1}{2} \\ d=\frac{1}{3} \end{cases}$$

D'où $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

EX 6

1. $f(x)=\frac{1}{x-1}$ $\quad g(x)=\frac{1}{x+1}$

$$f^{(3)}(x)=\frac{-6}{(x-1)^4} \qquad g^{(3)}(x)=\frac{-6}{(x+1)^4}$$

2. a/ $h(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1})$

$(a=b=\frac{1}{2})$

$$h^{(3)}(x)=\frac{1}{2}\left[g^{(3)}(x)+f^{(3)}(x)\right]$$

b/
$$=-3\left[\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{1}{(x+1)^4}\right]$$

EX 7: $f(2)=0$; $f'(2)=3$

1. Soit $h(x)=f(\sqrt{2+x})$ h est dérivable sur $]-2,+\infty[$ comme étant composée de fonctions dérivables et

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}.f'(\sqrt{2+x})$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(\sqrt{2+x})}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2} \quad car\ h(2)=0$$

$$=h'(2)=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{3}{4}$$

2. Soit les fonctions $U(x)=2\sin(\frac{\pi x}{4})$ et $t(x)=f(U(x))$ t est dérivable sur IR comme étant composée de fonctions dérivables et

$$t'(x)=U'(x).f'(U(x))=\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x}{4}).f'(U(x))$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(2\sin(\frac{\pi x}{4}))}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{t(x)-t(2)}{x-2}=t'(2)$$

$$=\frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi}{2}.f'(2)=0$$

3. Soit la fonction g(x)= sin(f(x))
g est dérivable sur IR comme étant composée de fonctions dérivables et g'(x)= f'(x).cos (f(x))

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(f(x))}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\quad car\ g(2)=0$$
$$=g'(2)=f'(2).\cos(f(2))$$
$$=3.\cos(0)=3$$

4. Soit la fonction k(x)=f(x²+x+2)
k est dérivable sur IR comme étant composée de fonctions dérivables et
k'(x)=(2x+1).f'(x²+x+2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2+x+2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k(x)-k(0)}{x-0}\quad car\ k(0)=0$$
$$=k'(0)=f'(2)=3$$

EX 8 :

1. f(x)=$\sqrt{x+\sqrt{x}}$; $I=]0,+\infty[$
la fonction $x\mapsto x+\sqrt{x}$ est dérivable et strictement positive sur I d'où f est dérivable sur I

f'(x)= $$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$
$$=\frac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}.\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

2. La fonction : $x\mapsto \sin x$ est dérivable et strictement positive sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ d'où f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et f'(x)= $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

3. La fonction : $x\mapsto\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur [1,+∞[et comme la fonction sinus est dérivable sur IR Alors f est dérivable sur [1,+∞[
et f'(x)= $\frac{-\pi}{x^2}.\cos(\frac{\pi}{x})$

4. f(x)= tg(sin(x))
La fonction sinus est dérivable sur IR et $\forall x\in IR;\ \sin(x)\in[-1,1]$; comme la fonction tangente est dérivable sur [-1,1]
Alors f est dérivable sur IR et
f'(x)=cos(x).[1+tg²(sin(x))]

EX 9: f(x)=1+x+x²+x³+x⁴

1. f'(x)=1+2x+3x²+4x³

$$f'(x)=2+6x+12x^2\geq 0\ \forall x\in\left[0,\frac{1}{10}\right]$$

d'où f' est croissante sur $[0,\frac{1}{10}]$ Alors

$$0\leq x\leq\frac{1}{10}\Rightarrow f'(0)\leq f'(x)\leq f'(\frac{1}{10})$$
$$\Rightarrow 1\leq f'(x)\leq 1,234$$
$$\Rightarrow 0\leq f'(x)\leq 1,234$$

2. Soit $x\in[0,\frac{1}{10}]$, f est dérivable sur [0,x] et $0\leq f'(t)\leq 1,234\ \ \forall t\in[0,x]$
Alors d'après th.Ineg.Acc.fini

$$0\leq f(x)-f(0)\leq 1,234.(x-0)$$
$$\Rightarrow 1\leq f(x)\leq 1+1,234.x$$
$$1\leq f(0,0000000011)\leq 1+1,234.11.10^{-10}$$

3. $1\leq f(0,0000000011)\leq 1+13,57.10^{-10}$
$\Rightarrow 1\leq f(0,0000000011)\leq 1,000000001$

EX 10 : f(x)= $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $I=[0,1]$

1. la fonction : x → 1+x
est dérivable et strictement positive sur [0,1] d'où f est dérivable sur [0,1]

$$f'(x)=\frac{-1}{2(1+X)\sqrt{1+X}}=\frac{-1}{2(\sqrt{1+x})^3}$$

$$0\leq x\leq 1\Rightarrow 1\leq 1+x\leq 2$$
$$\Rightarrow 1\leq\sqrt{1+x}\leq\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow 2\leq 2.(\sqrt{1+x})^3\leq 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4\sqrt{2}}\leq\frac{1}{2(\sqrt{1+X})^3}\leq\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

2. $x \in [0,1]$

f est dérivable sur [0,1]

$|f'(t)| \le \frac{1}{2}$; $\forall\, t \in [0,1]$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis

$|f(x)-f(0)| \le \frac{1}{2}|x-0|$

$|f(x)-1| \le \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}x \le f(x)-1 \le \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}x \le f(x) \le 1+\frac{1}{2}x$

$d'où\ 1-\frac{1}{2}x \le f(x)$ (1)

$x \ge 0 \Rightarrow 1+x \ge 1$

$\Rightarrow \sqrt{1+x} \ge 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} \le 1$

$\Rightarrow f(x) \le 1$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow$

$1-\frac{1}{2}x \le f(x) \le 1\ pour\ x \in [O,1]$

3.

$\alpha = 0,0000000002 = 2.10^{-10}$

$1-\frac{1}{2}\alpha \le f(\alpha) \le 1$

$1-10^{-10} \le f(\alpha) \le 1$

$0,999999999 \le f(\alpha) \le 1$

Ex 11 :

Soit f(t)= cos(t) f est dérivable sur IR

f'(t) = -sin(t) $\Rightarrow |f'(t)| \le 1\ \forall t \in IR$

Alors d'après th.In.Ac .finis

Pour tous réels x et y on a :

$|f(x)-f(y)| \le 1.|x-y| \Rightarrow |\cos x - \cos y| \le |x-y|$

EX 12 :

1. Soit f(t)=sin (t) f est dérivable sur IR et f'(t)= cos (t)

$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right] On\ a\ \frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos(t) = f'(t) \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors d'après th.Inég.Acc.finis :

$\frac{\sqrt{2}}{2}.(y-x) \le f(y)-f(x) \le \frac{\sqrt{3}}{2}.(y-x)$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}.(y-x) \le \sin(y)-\sin(x) \le \frac{\sqrt{3}}{2}.(y-x)$

2. pour $x = \frac{\pi}{6}$ et $y = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}.(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}) \le \sin(\frac{\pi}{4})-\sin(\frac{\pi}{6}) \le \frac{\sqrt{3}}{2}.(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}.\pi}{24} \le \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{3}.\pi}{24}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{12} \le \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \le \frac{\sqrt{3}}{12}$

EX 13 :

1. *La fonction tg est dérivable et ne s'annule pas sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ d'où la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{tg(x)}$ est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

*

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{(x-\frac{\pi}{2}).tg(x)}$$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\cot g(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = (\cot g)'(\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{-1}{\sin^2(\frac{\pi}{2})} = -1 = f_g'(\frac{\pi}{2})$$

Donc f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$

Conclusion : f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

2.

$*-2 \le f_g'(\frac{\pi}{2}) = -1 \le -1$

$*pour\ x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\quad f'(x) = \frac{-(1+tg^2(x))}{tg^2(x)}$

$$f'(x) = -(1+\frac{1}{tg^2(x)})$$

$$pour\ x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\quad tg(x) \ge 1 \Rightarrow tg^2(x) \ge 1$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{tg^2(x)} \le 1 \Rightarrow 1 \le 1+\frac{1}{tg^2(x)} \le 2$$

$$\Rightarrow -2 \le -(1+\frac{1}{tg^2(x)}) \le -1$$

$$\Rightarrow -2 \le f'(x) \le -1$$

Conclusion :

$$-2 \le f'(x) \le -1 \quad pour\ tout\ x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

3. $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ *f est dérivable sur* $\left[\frac{\pi}{4},x\right]$ et $-2 \le f'(t) \le -1 \quad \forall t \in \left[\frac{\pi}{4},x\right]$

Alors d'après th des acc finis :

$$-2(x-\frac{\pi}{4}) \le f(x)-f(\frac{\pi}{4}) \le -(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}-2x \le \frac{1-tg(x)}{tg(x)} \le \frac{\pi}{4}-x$$

EX 14 :

1. a/ $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et h(x)=tg(x)

h est dérivable sur[0,x] et $h'(x)=1+tg^2x \ge 1$ d'où

$h(x)-h(0) \ge 1.(x-0) \Rightarrow tg(x) \ge x$

b/ $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$; $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x) = \frac{x.\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$$

$$= \frac{\cos(x)}{x^2}(x-tg(x)) \le 0\ car\ x \le tg\ x\ et\ \cos x \ge$$

d'où f est décroissante sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

2. a/ $h(t)=tg(t)$, $h'(t)=\frac{1}{\cos^2(t)}$

pour $t \in [x,y]$ $\cos y \le \cos t \le \cos x$ car la fonction cos est décroissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow \cos^2 y \le \cos^2 t \le \cos^2 x$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \le h'(t) \le \frac{1}{\cos^2 y}$ Alors d'après le th.Inega.Acc.Finis :

$$\frac{1}{\cos^2 x}(y-x) \le h(y)-h(x) \le \frac{1}{\cos^2 y}(y-x)$$

$$\Rightarrow \frac{y-x}{\cos^2 x} \le tg(y)-tg(x) \le \frac{y-x}{\cos^2 y}$$

b/ d'après la question précédente :

pou $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\frac{x-0}{\cos^2 0}\le tg(x)-tg(0)\le\frac{x-0}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow x\le tg(x)\le\frac{x}{\cos^2 x}$$

c/

$$x\le\frac{\sin x}{\cos x}\le\frac{x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow x.\cos(x)\le\sin(x)\le\frac{x}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \cos(x)\le\frac{\sin(x)}{x}\le\frac{1}{\cos(x)}$$

3. pour $x\in]0,\frac{\pi}{2}]$

$$\cos(x)\le g(x)\le\frac{1}{\cos(x)}\Rightarrow$$

$$\cos(x)-1\le g(x)-g(0)\le\frac{1}{\cos(x)}-1\Rightarrow$$

$$-\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right)\le\frac{g(x)-g(0)}{x}\le\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right).\frac{1}{\cos(x)}$$

$$Or\ \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right)=0\ et\ \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right).\frac{1}{\cos(x)}=0$$

$$d'où\ \lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=0$$

par suite g est dérivable à droite en 0 et $g_d'(0)=0$ donc C_g admet une demi-tangente horizontale à droite au point d'abscisse 0 et comme g est une fonction paire alors g admet aussi une demi-tangente horizontale à gauche au point d'abscisse 0 donc g est dérivable aussi à gauche en 0 et $g_g'(0)=0$

par suite g est dérivable en 0 et g'(0)=0

EX 15 :

1) * f est dérivable sur]0,1] ⇒ f est continue sur]0,1] d'où : $g: x\mapsto\frac{f(x)}{x}$ est continue sur]0,1]

* continuité à droite en 0 :

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f_d'(0)=0=g(0)$$

g est continue à droite en 0 .

Par suite g est continue sur [0,1]

2) a) g est continue sur [0,1] et dérivable sur]0,1[; g(0)=g(1)=0

D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c\in]0,1[$ tq : g'(c)=0

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$g'(c)=0\Leftrightarrow c.f'(c)-f(c)=0$$

b) la tangente à (ζ) au point d'abscisse c a pour équation :

T :y=f'(c).(x-c)+f(c)

T :y=f'(c).x+f(c)-f'(c).c

T :y=f'(c).x

O(0,0)∈T

EX 16 :

$(P): y=x^2+ax+b$

soit f(x)=x²+ax+b

(ζ_f)=(P)

f'(x)=2x+a

la tangente (T) à (P) au point d'abscisse $\frac{x_A+x_B}{2}$ a

pour coefficient directeur $f'\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)=x_A+x_B+a$

la droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$\frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}=x_A+x_B+a$$

(*T*) et (AB) ont le meme coefficient directeur

par suite (T) // (AB)

EX 17 :

1) $(\zeta_f)\cap(Ox)=\{A,B\}$

Désignons x_1 et x_2 les abscisses respectifs de A et B avec $x_1<x_2$.

$f(x_1)=0$; $f(x_2)=0$

f est continue sur$[x_1,x_2]$ dérivable sur $]x_1,x_2[$ et $f(x_1)=f(x_2)=0$

d'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel $c\in]x_1,x_2[$ tel que : $f'(c)=0$

(ζ_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse c

2) $(\zeta_f)\cap(Ox)=\{A_1,A_2,.....,A_n\}$

designons par $x_1,x_2,.....,x_n$ les abscisses respectifs de $A_1,A_2,.....,A_n$

avec $x_1<x_2<....<x_n$

f est dérivable sur $[x_i,x_{i+1}]$

$f(x_i)=f(x_{i+1})=0$

d'où il existe au moins un réel $c_i\in]x_i,x_{i+1}[$

tq $f'(c_i)=0$

par suite l'équation f'(x)=0 admet au moins (n-1) solutions

(ζ) admet au moins (n-1) tangentes horizontales

EX 18 :

f dérivable sur [-2,-1]

f(-2)=f(-1)=0

d'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel $c_1\in]-2,-1[$ tq : $f'(c_1)=0$

de même : il existe au moins un réel $x_2\in]-1,1[$ tq $f'(c_2)=0$

et un réel $c_3\in]1,2[$ tq $f'(c_3)=0$

par suite l'équation f'(x)=0 admet au moins trois solutions

EX 19 :

Soit k un entier avec $1\le k\le n$

$f^{(k)}$: la dérivée $k^{ième}$ de f.

montrons par récurrence sur k que :

$f^{(k)}$ s'annule pour (n+1-k) valeurs distincts de [a,b]

* pour k=1 :

f s'annule (n+1) fois d'après l'exercice n°1

f' : s'annule n fois

$f^{(1)}$: s'annule pour (n+1-1) valeurs distincts de [a,b] (vrai)

* supposons que $f^{(k)}$ s'annule (n+1-k) fois

* montrons que : $f^{(k+1)}$ s'annule (n-k) fois

D'après l'ex 17 : $f^{(k+1)}=(f^{(k)})'$ s'annule ((n+1-k)-1) fois

$\Rightarrow f^{(k+1)}$ s'annule (n-k) fois

Conclusion : $f^{(k)}$ s'annule au moins pour (n+1-k) valeurs distincts de [a,b]

$\forall k\in\{1,2,...,n\}$

* pour k=n , $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur [a,b]

EX 20 :

1. la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est continue sur IR^*

la fonction sinus est continue sur IR

d'où la fonction $x\mapsto\sin(\frac{1}{x})$ est continue sur IR^*

par suite f est continue sur IR^* comme étant produit des fonctions continues.

*<u>Etude de continuité de f en 0</u>

$$pour\ x\neq 0\ on\ a\ -1\le\sin(\frac{1}{x})\le 1$$

$$\Rightarrow -x^2\le f(x)\le x^2$$

$$Or\quad \lim_{x\to 0}x^2=\lim_{x\to 0}(-x^2)=0$$

$$d'où\quad \lim_{x\to 0}f(x)=0$$

D'où f est continue en 0

Conclusion : f est continue sur IR

2. a/

$$pour\ x\neq 0\ \left|\sin(\frac{1}{x})\right|\le 1$$

$$\Rightarrow\left|x\sin(\frac{1}{x})\right|\le|x|\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|x|$$

b/ pour $x\neq 0$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x|$$

$\lim_{x\to 0}|x| = 0$ d'où $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$

D'où f est dérivable en 0 ett f'(0)=0

3) a) la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

La fonction : x↦sin x est dérivable sur IR

D'où $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable sur IR*

Par suite f est dérivable sur IR*

Or f est dérivable en 0 ,

d'où f est dérivable sur IR

$$f'(x) = 2x.\sin(\frac{1}{x}) + x^2.\left[\frac{-1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})\right]$$

$$f'(x) = 2x.\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

b) $n\neq 0$

$$f'(\frac{1}{n\pi}) = \frac{2}{n\pi}.\sin(n\pi) - \cos(n\pi) = -\cos(n\pi) = -(-1)^n$$

$$\left|f'(\frac{1}{n\pi})\right| = 1$$

c) f '(0)=0

Supposons que f ' est continue en 0

Soit la suite $V_n = \left|f'(\frac{1}{n\pi})\right|$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\pi} = 0$, f ' continue en 0

D'où $\lim_{n\to+\infty} V_n = f'(0) = 0$

Or V_n=1 daprés b) (absurde)

f ' n'est pas continue en 0

EX 21 :

1)

x	-∞		-2		1		+∞
f'(x)		+	‖	-	0	+	
f(x)	0	↗	2	↘	-2	↗	+∞

2) $\lim_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = +\infty$

$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = -3$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-4) = 0$

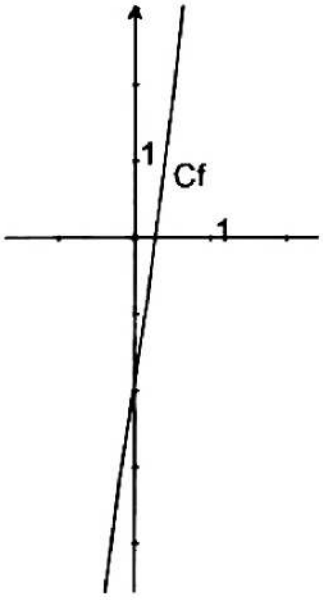
EX 22 : f(x)=4x³ +6x-2

f est dérivable sur IR et f'(x)=12x²+6>0

x	-∞		+∞
f'(x)		+	
f(x)	-∞	↗	+∞

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$

La courbe de f admet deux branches infinies paraboliques de direction celle de $(O,\vec{j})$



EX 23 :

$f(x)=\dfrac{x^3+2x+2}{2x}$

$D_f=IR^*$, f est dérivable sur IR^*

$f'(x)=x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^3-1}{x^2}$

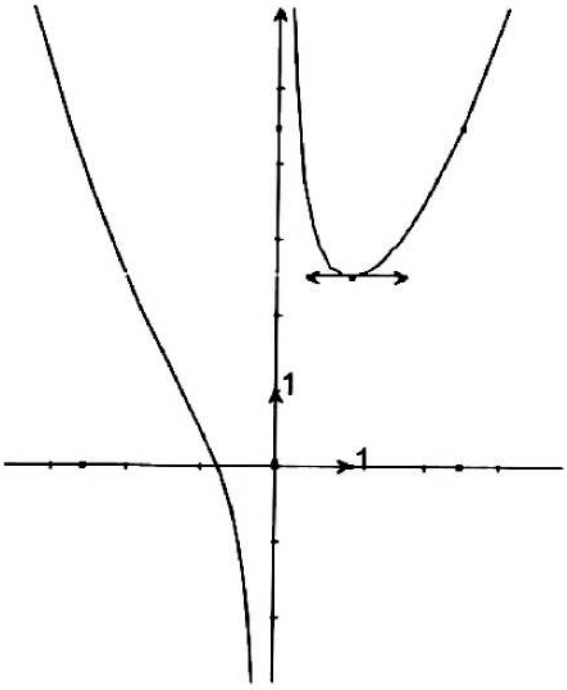
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)	-		-	0	+		
f(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘		5/2	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}=-\infty$

(ζ_f) admet deux branches paraboliques de direction celle de $(O,\vec{j})$

x=0 est une asymptote à (ζ_f)



EX 24 :

$f(x)=x.(\dfrac{x+1}{x-1})^2$

$D_f=IR/\{1\}$

f est dérivable sur $IR/\{1\}$ (fonction rationnelle)

$f'(x)=\dfrac{(x+1).(x^2-2x-1)}{(x-1)^3}$

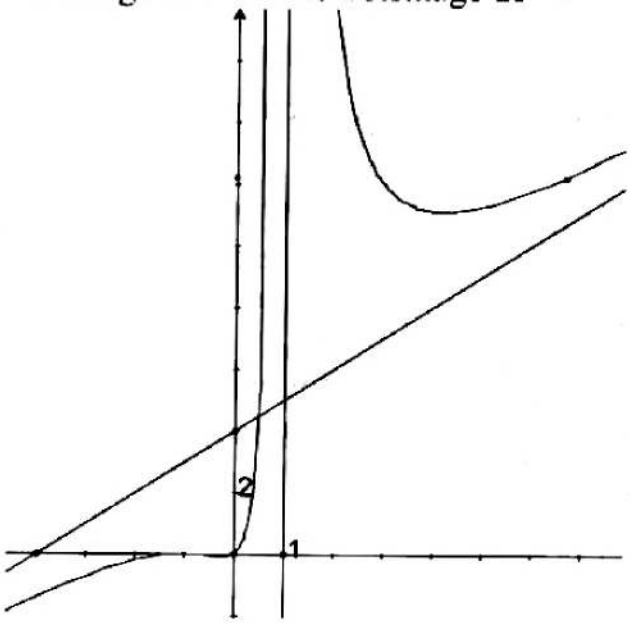
x	$-\infty$	-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	+		-	0	+	
f(x)	↗	0	↘	$7-5\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↘	$7+5\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{x+1}{x-1})=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x.\left[\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-1\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x.\left[\dfrac{4}{(x-}\right.$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^2}{x^2}=4$

Δ :y=x+4 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$



EX 25 :

$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$

$x^2+2x+3=0$

$\Delta'=-2<0 \Rightarrow x^2+2x+3>0 \quad \forall x\in IR$

$D_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur tout IR car $x^2+2x+3>0$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+3}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	$\sqrt{2}$	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+2x+3}{x^2}}=1$$

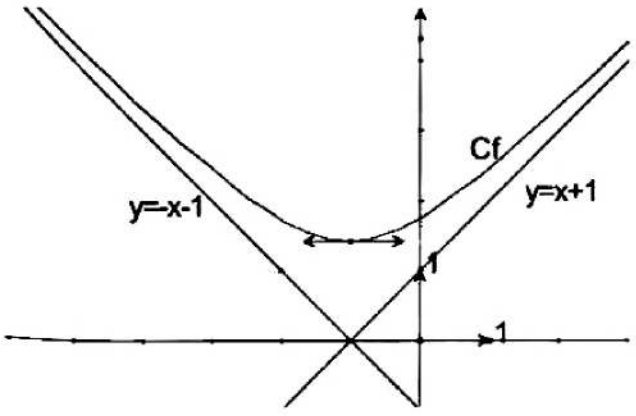
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}=1$$

Δ_1 : y=x+1 est une asymptote à (ζ) au voisinage ($+\infty$)

$$\underset{x\to-\infty}{Lim}\frac{f(x)}{x}=-1 \qquad \underset{x\to-\infty}{Lim}(f(x)+x)=-1$$

(ζ) admet la droite D_2 :y=-x-1 comme asymptote au voisinage de ($-\infty$)



EX 26 :

$f(x)=5x+3\sqrt{x^2-1}$

$D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

- f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{5(x-1)+3\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}5+\frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

f non dérivable à droite en 1, de même f non dérivable à gauche en (-1)

* pour $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=5+3\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)=5+\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$$

- pour $x\in]1,+\infty[$; $f'(x)>0$
- pour $x\in]-\infty,-1[$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}=-5\Leftrightarrow\frac{9x^2}{x^2-1}=25$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{25}{16}\Leftrightarrow x=\frac{-5}{4}$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	- | //// |		+
f(x)	↗ $-\infty$	-4	↘ -5 /// //// ///	↗ 5	↗ $+\infty$

$$\underset{x\to-\infty}{Lim}f(x)=\underset{x\to-\infty}{Lim}(3\sqrt{x^2-1}+5x)$$

$$=\underset{x\to-\infty}{Lim}\frac{9(x^2-1)-25x^2}{3\sqrt{x^2-1}-5x}$$

$$=\underset{x\to-\infty}{Lim}\frac{16x^2+9}{5x-3\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\underset{x\to-\infty}{Lim}\frac{16x+\frac{9}{x}}{5+3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5x + 3\sqrt{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 + 3\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = 8$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-8x) = \lim_{x\to+\infty} 3(\sqrt{x^2-1}-x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

Δ_1 : y=8x est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

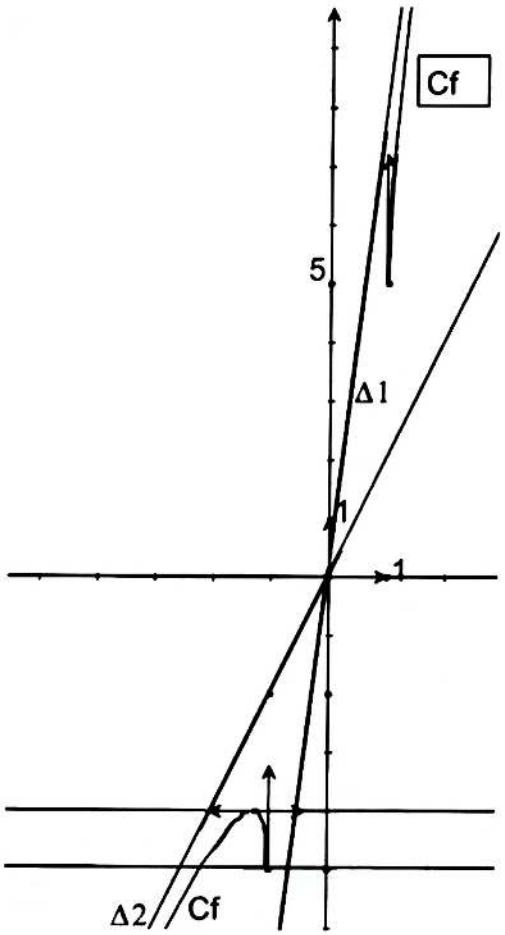
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 + 3\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 5 + \frac{3|x|.\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 5 - 3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to-\infty} 3.\left[\sqrt{x^2-1}+x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0$$

Δ_2 : y=2x est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$



EX 27 :

$f(x)= x+\sqrt{4-x^2}$ $D_f=[-2,2]$

- la fonction : $x \mapsto 4-x^2$ est dérivable et Strictement positive sur $]-2,2[$ d'où f est dérivable sur $]-2,2[$.

- $$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2+\sqrt{4-x^2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} 1+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} 1+\frac{(2-x).(2+x)}{(x-2).\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} 1-\frac{(2+x)}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2
La courbe de f admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

- de même on montre que f n'est pas Dérivable à droite en -2

- pour $x\in]-2,2[$ $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

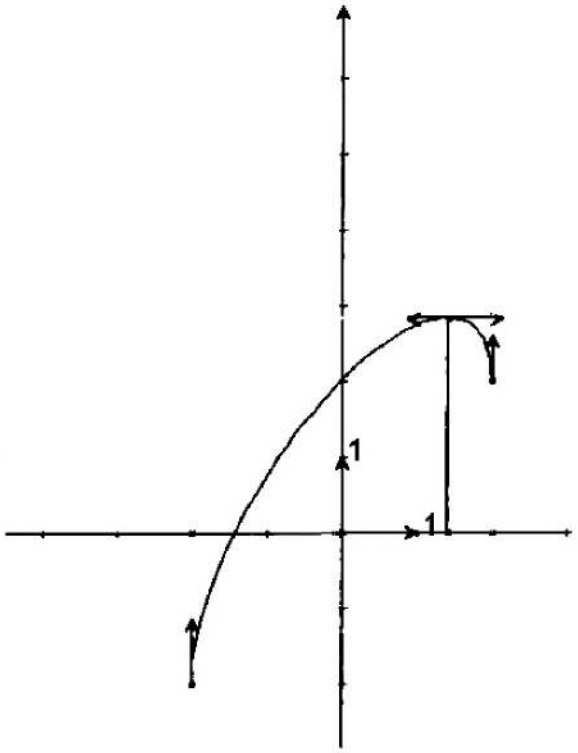
  - pour $x\in]-2,0[$ $f'(x)>0$
  - pour $x\in]0,2[$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1>\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \Leftrightarrow x<\sqrt{4-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2<4-x^2 \Leftrightarrow x^2<2$$

$$\Leftrightarrow x<\sqrt{2}$$

X	-2		$\sqrt{2}$		2
f'(x)	‖	+	0	-	‖
f(x)	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2



EX 28 : $f(x)=x.\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

- $D_f=]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$
- f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}.\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1

- pour $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+x.\left(\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{x}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}.\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{x}{(x+1)^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}.\left[\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\right]$$

le signe de f'(x) est celui de (x^2+x-1)

$\Delta=5$ $\quad x'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\in D_f$ $\quad x''=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\notin D_f$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	////	+
f(x)	$-\infty$	f(x')	//// ///// ///	0	$+\infty$

$f(x')=f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})\approx -3$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x.\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x.\left[\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right]$$

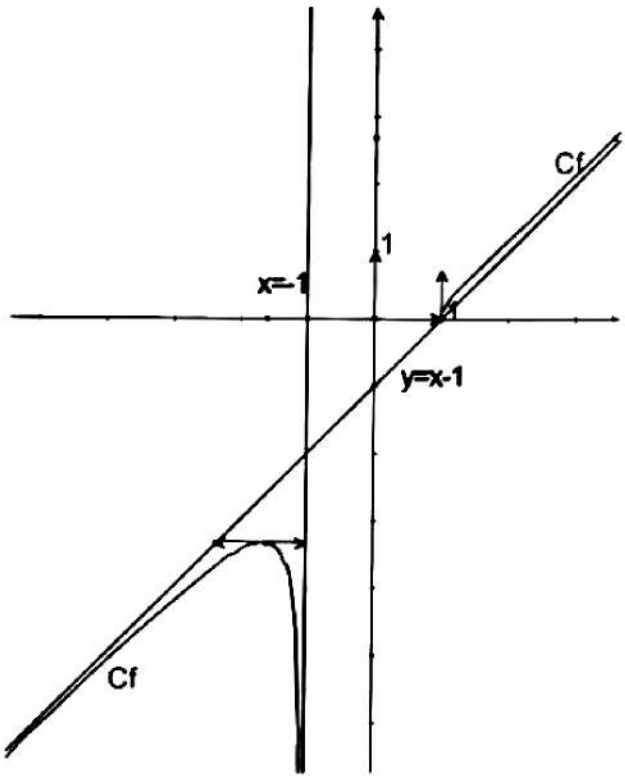
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}.\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=-1$$

Δ_1 : y=x-1 est une asymptote à C_f au voisinage de $(+\infty)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=-1$

Δ_1 : y=x-1 est une asymptote à C_f au voisinage de $(-\infty)$



EX 29 : $f(x)= \sin^2(x)+\cos(x)$

1) a/ $f(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)$

$= \sin^2(x)+\cos(x)=f(x)$

Donc 2π est une période de f.

b/ *pour $x\in\mathbb{R}$ on a $(-x)\in\mathbb{R}$

* $f(-x)=\sin^2(-x)+\cos(-x)=[\sin(-x)]^2+\cos(x)$

$= \sin^2(x)+\cos(x)=f(x)$

donc f est une fonction paire

donc la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f

2) a/ Domaine d'étude $D_E=[0,\pi]$

$f'(x)=2\cos(x).\sin(x)-\sin(x)$

$=2\sin(x).\left[\cos(x)-\frac{1}{2}\right]$

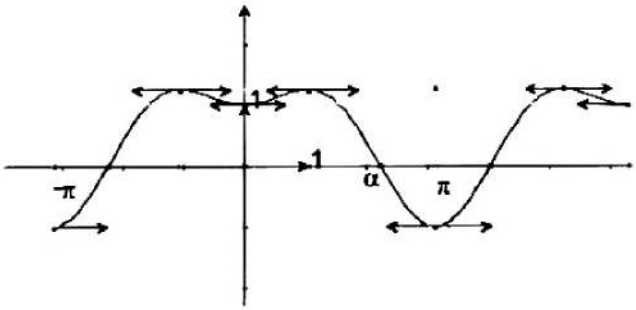
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	0	+	0	-	0
f(x)	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1

b/ f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ sur $f\left(\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\right)=\left[1,\frac{5}{4}\right]$ et comme $0\notin\left[1,\frac{5}{4}\right]$ alors l'équation f(x)=0 n'a pas de solution dans $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

/ f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ sur $f\left(\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]\right)=\left[-1,\frac{5}{4}\right]$ et comme $0\in\left[-1,\frac{5}{4}\right]$ alors l'équation f(x)=0 admet une seule solution α dans $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

Conclusion : l'équation f(x)=0 admet α comme unique solution dans $[0,\pi]$

$f(2,2).f(2,3)<0 \Rightarrow 2,2<\alpha<2,3$



EX 30 :

I. $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ $D_f=IR\backslash\{1\}$

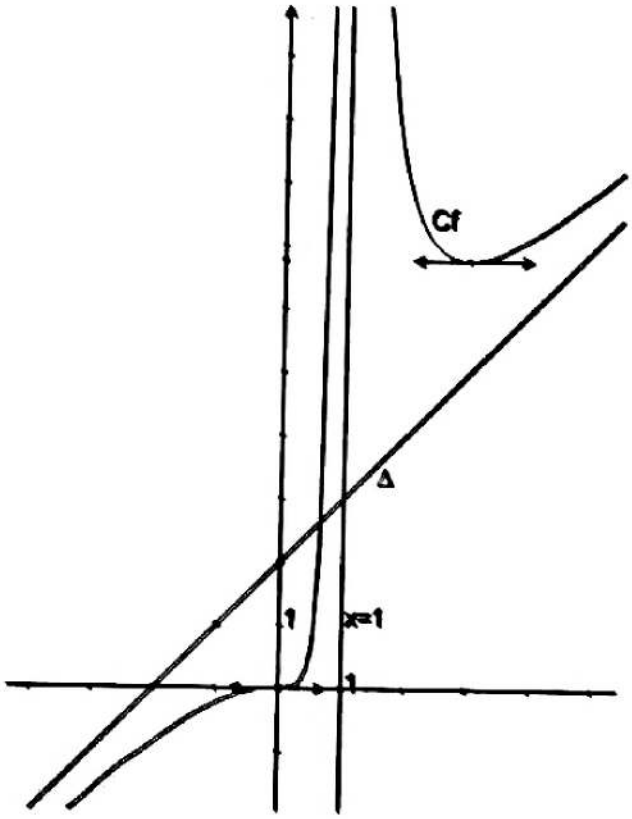
f est dérivable sur $IR\backslash\{1\}$

$f'(x)=\frac{x^2.(x-3)}{(x-1)^3}$ le signe de f'(x) est celui de (x-1).(x-3)

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$		$+\infty$ ‖	↘	$\frac{27}{8}$	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=2$

Δ : y=x+2 est une asymptote à C_f au voisinage de $(-\infty)$ et au voisinage de $(+\infty)$



II. $h(x)=\dfrac{\sin^3(x)}{(\sin(x)-1)^2}=f(\sin(x))$

1) a/ sin(x)-1=0⇔sin(x)=1

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbf{Z}$

$D_h=\mathbb{R}\setminus\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ ,k\in\mathbf{Z}\}$

b/ h(x+2π)=f(sin(x+2π))=f(sin(x))=h(x)
donc 2π est une période de h.

c/ • $x\in D_h \Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ ,k\in\mathbf{Z}$

$\Rightarrow -x\neq-\dfrac{\pi}{2}-2k\pi\ ,k\in\mathbf{Z}$

$\Rightarrow \pi-x\neq\dfrac{\pi}{2}-2k\pi\ ,k\in\mathbf{Z}$

$\Rightarrow 2.\dfrac{\pi}{2}-x\in D_h$

• h(π-x)= f(sin(π-x))=f(sin(x))=h(x)

Conclusion: Δ: x=π/2 est un axe de symétrie pour C_h

2) a/ h(x)= f(sin(x))

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\sin(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty\end{array}\right\rangle\Rightarrow \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}h(x)=+\infty$

b/ h'(x)= cos(x).f'(sin(x))

pour $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

$\left.\begin{array}{l}\cos(x)\geq 0\\ et\ \sin(x)\in[-1,1[\Rightarrow f'(\sin(x))\geq 0\end{array}\right\rangle\Rightarrow$

$h'(x)\geq 0\ ;\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow$

h est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

c/

$h'(x)=0\Leftrightarrow\cos(x)=0 \quad ou \quad f'(\sin(x))=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad ou \quad \sin(x)=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad ou \quad x=k\pi \quad k\in\mathbf{Z}$

$$S_{D_h}=\left\{\frac{-\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

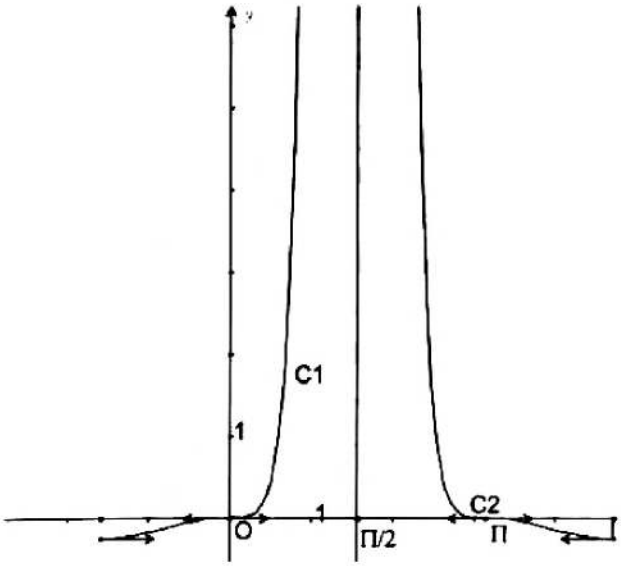
d/ h' s'annule et ne change pas de signe en 0 donc le point de coordonnées (0,h(0)) est un point d'inflexion pour C_h
Conclusion : l'origine du repère est un point d'inflexion pour C_h

3) Soit C_1 la courbe de la restriction de h sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et Δ :x=π/2

$C_2=S_\Delta(C_1)$:la courbe de la restriction de h sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$

$$C_h=\underset{k\in\mathbb{Z}}{U}t_{2k\pi\vec{i}}(C_1\cup C_2)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	+	0	+	
f(x)	$-\frac{1}{4}$	↗		↗	$+\infty$



EX 31 :

1) $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x-2}$

$D_f=\mathbb{R}/\{2\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}/\{2\}$

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

$x^2-4x-2=0$ $\quad x'=2-\sqrt{6}$ $\quad x''=2+\sqrt{6}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)		↗ f(x') ↘			+∞	↘	f(x'')	↗	+∞
	$-\infty$		$-\infty$						

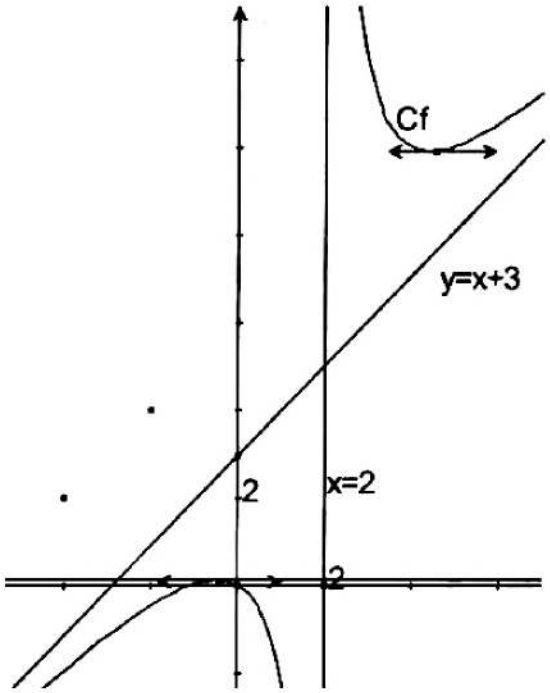
* $f(x)=x+3+\dfrac{6}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x-2}=0$

$\Delta: y=x+3$ est une asymptote à (ζ_f)

$f(2-\sqrt{6})=5-2\sqrt{6}$

$f(2+\sqrt{6})=5+2\sqrt{6}$



2) dans $\mathbb{R}/\{2\}$

$x^2+(1-m)x+2m=0 \Leftrightarrow x^2+x=m.(x-2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x+1)}{x-2}=m \Leftrightarrow f(x)=m$

1^{er} *cas* : m $\in\ ]-\infty,5-2\sqrt{6}[\ \cup\ ]5+2\sqrt{6},+\infty[$

l'équation admet deux solutions

2^{eme} *cas* : m=5-2√6 ou m=5+2√6

l'équation admet une unique solution

3^{eme} cas : m $\in\ ]5-2\sqrt{6},5+2\sqrt{6}[$

l'équation n'a pas de solution

3) (E) $\Leftrightarrow$ f(cosx)=m $\cos x \in [-1,1]$

$f([-1,1])=\left[-2;5-2\sqrt{6}\right]$

h(x)=f(cosx) est périodique de période 2π

1er cas : $m \notin \left[-2;5-2\sqrt{6}\right]$ l'équation n'a pas de solution

2ème cas : $m \in \left[-2;5-2\sqrt{6}\right]$ l'équation admet une infinité de solutions

EX 32 :

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin(2x)$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

f(-x)=-f(x) : f est impaire

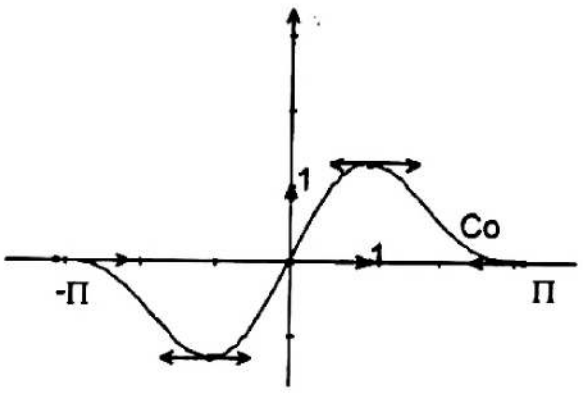
$f(x+2\pi)=f(x)$: 2π est une période de f

il suffir d'étudier f sur $[0,\pi]$

$$f'(x)=\cos x+\cos 2x=\cos x+2\cos^2 x-1$$

$$=2\cos^2 x+\cos x-1=2(\cos x+1)(\cos x-\frac{1}{2})$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	2	+	0	-	0
f(x)	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0



$$(\zeta_f)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{2k\pi\vec{i}}(\zeta_0)$$

EX 33 :

$$f(x)=\frac{\cos x}{2\cos x-1}$$

$$2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left\{x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ ; k\in\mathbb{Z} \ \text{ou} \ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ ; k\in\right.$$

$$D_f=\mathbb{R}/\left\{\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\} ; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

f est dérivable sur D_f

$$f'(x)=\frac{-\sin x(2\cos x-1)+2\sin x\cos x}{(2\cos x-1)^2}$$

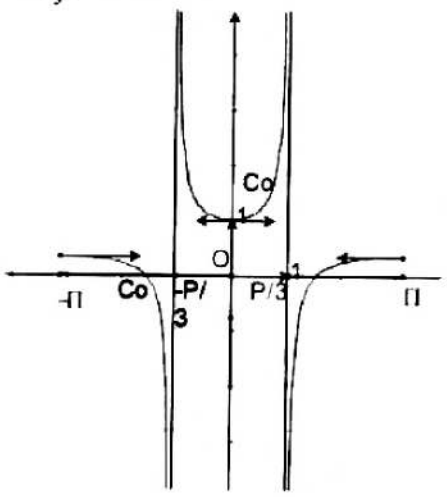
$$=\frac{\sin x}{(2\cos x-1)^2}$$

- 2π est une période de f
- f(-x)=f(x) : f est paire

$$D_E=[0,\pi]/\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	0	+	||	+	0
f(x)	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})} \frac{\cos x}{2\cos x-1}=+\infty$$



$$(\zeta_f)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{2k\pi\vec{i}}(\zeta_0)$$

EX 34 :

$$\begin{cases} f(x)=|x^2+x| & \text{si } x<0 \\ f(x)=x\sqrt{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

1) la fonction : $x \mapsto x^2+x$ est continue sur $]-\infty,0[$

d'où f est continue sur $]-\infty,0[$

• f est continue sur $]0,+\infty[$ (produit de 2 fonctions continues)

• continuité en 0 : f(0)=0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}|x^2+x|=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{x}=0=f(0)$$

f est continue en 0 d'où f est continue sur $\mathbb{R}$

2)

x	$-\infty$	-1	0
x^2+x	+	0	-

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(x^2+x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}-(x+1)=-1=f'_g(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0=f'_d(0)$$

f n'est pas dérivable en 0

$$*\ \lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{-(x^2+x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}-x=1=f'_g(-1)$$

$$\lim_{x\to(-1)}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}(x)=-1=f'_d(-1)$$

f n'est pas dérivable en (-1)

3) * pour $x\in]0,+\infty[$

$$f(x)=x\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\sqrt{x}+x.(\frac{1}{2\sqrt{x}})=\frac{3}{2}\sqrt{x}>0$$

* pour $x\in]-1,0[$

$$f(x)=-(x^2+x)$$

$$f'(x)=-(2x+1)$$

* pour $x\in]-\infty,-1[$

$$f(x)=x^2+x$$

$$f'(x)=2x+1<0 \qquad \forall x\in]-\infty,-1[$$

x	$-\infty$	-1	-1/2	0	$+\infty$
f'(x)	-	‖	+ 0	- ‖	+
f(x)	$+\infty$	↘ 0	↗ 1/4	↘ 0	↗ $+\infty$

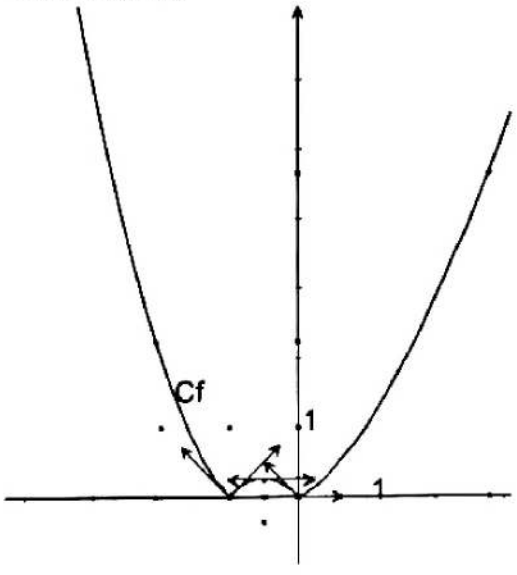
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+x)=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$$

(ζ_f) admet 2 branches paraboliques de direction celle de $(O,\vec{j})$



EX 35 :

1) $g(x)=2x^3+3x^2+1$

a) $g'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g'(x)	+		0	-	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

b) dans l'intervalle $[-1,+\infty[$, g admet 1 comme minimum absolu

$\Rightarrow g(x)\geq 1$; $\forall x\in[-1,+\infty[$

d'où l'équation g(x)=0 n'a pas de solutions dans l'intervalle $[-1,+\infty[$

* dans l'intervalle $]-\infty,-1]$

g est continue sur $[-2,-1]$

$g(-2)\times g(-1)=(-3)(2)<0$

d'où il existe un réel $\alpha\in]-2,-1[$ tq: $g(\alpha)=0$

comme g est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ alors α est l'unique solution de l'équation : g(x)=0 dans $]-\infty,-1]$

conclusion : l'équation g(x)=0 admet α comme unique solution dans $\mathbb{R}$

$\alpha\in]-2,-1[$

$\left.\begin{matrix} g(-1,7)=-0,156 \\ g(-1,6)=0,488 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow g(-1,7).g(-1,6)<0$

$\Rightarrow -1,7<\alpha<-1,6$

Une valeur approchée à 10^{-1} prés de α est -1,7

c)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g(x)	-		0	+	

2) $f(x)=\dfrac{x+x^3}{1-x^3}$

a) $D_f=\mathbb{R}/\{1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}/\{1\}$

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1-x^3)^2}$

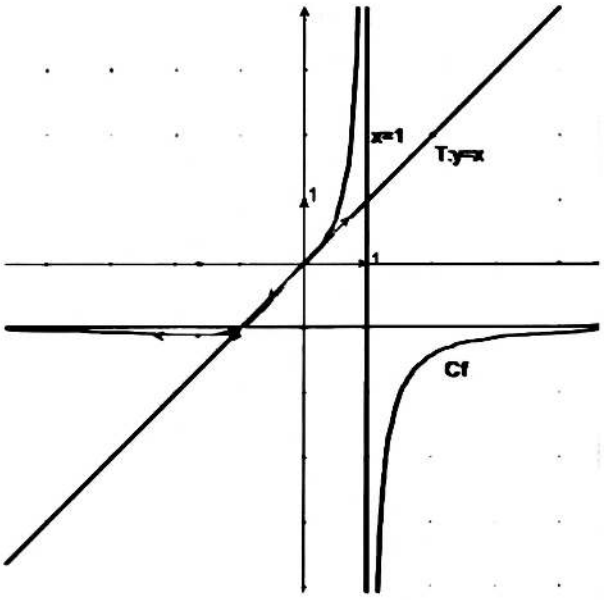
x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
g'(x)	-		0	+	‖	+	
g(x)	-1	↘	f(α)	↗	‖	↗	-1 / $-\infty$

b) T:y=f'(0).(x-0)+f(0)

T:y=x

c) $f(x)-x=\dfrac{x^3(1+x)}{1-x^3}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)-x		+	0	-	0	+	‖	-	
Position relative		C/T		T/C		C/T	‖	T/C	



EX 36 :

1) $g(x)=2x^3+x-2$

a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x)=6x^2+1>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

b)

g est continue sur $[0,1]$

$g(0)\times g(1) = -2<0$

d'où il existe un réel $\alpha \in]0,1[$ tq: $g(\alpha)=0$

comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors α est unique

c) $g(0,8).g(0,9)<0$

$g(0,83).g(0,84)<0$ donc 0,83 est une valeur approchée à 10^{-2} prés

d)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

$x>\alpha \Rightarrow g(x)>g(\alpha)$ car g est strictement croissante

$\Rightarrow g(x)>0$

2) $f(x)=\sqrt{x^4+(x-2)^2}$

$D_f=\mathbb{R}$

a) la fonction $x \mapsto x^4+(x-2)^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{4x^3+2(x-2)}{2\sqrt{x^4+(x-2)^2}}=\frac{g(x)}{\sqrt{x^4+(x-2)^2}}$$

b)

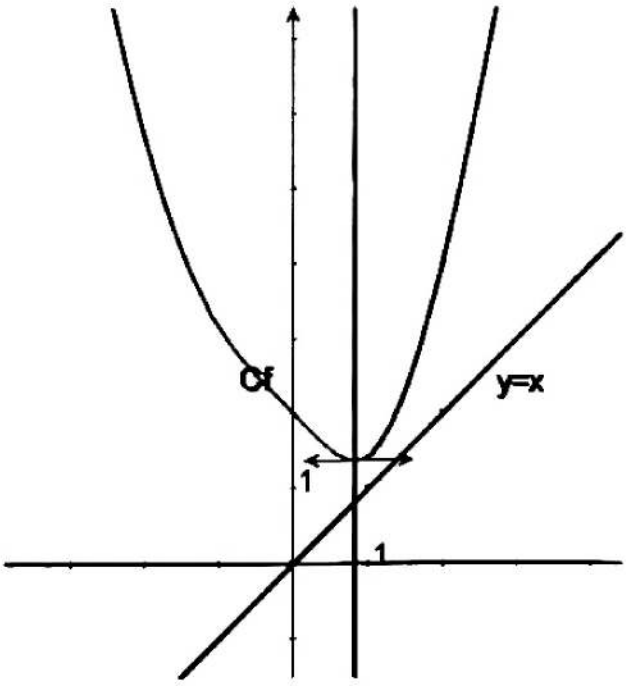
x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+(x-2)^2}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+(x-2)^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x^2=+\infty$$

d'où $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$



EX 37 :

$U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$

1) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0$

d'où (U_n) est croissante

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x \in]0,+\infty[$

a) $k \geq 1$, $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow k^3 \leq x^3 \leq (k+1)^3$

$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{k^3} \Rightarrow \frac{-2}{k^3} \leq f'(x) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$

f est dérivable sur $[k,k+1]$ et $\frac{-2}{k^3} \leq f'(x) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$

d'aprés le théorème des inégalités des accroissements finis:

$\frac{-2}{k^3} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$

$\Rightarrow \frac{2}{(k+1)^3} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{2}{k^3}$

b) pour $1 \leq k \leq n$

* $f(k)-f(k+1) \leq \frac{2}{k^3}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} [f(k)-f(k+1)] \leq 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3}$

$\Rightarrow f(1) - f(n) \leq 2\left[U_n - \frac{1}{n^3}\right]$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} \leq 2U_n - \frac{2}{n^3} \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^3}$

$\Rightarrow U_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$ (1)

* $\frac{2}{(k+1)^3} \leq f(k) - f(k+1)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)^3} \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - f(k+1)$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^3} \leq f(1) - f(n) \Rightarrow 2[U_n - 1] \leq 1 - \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow U_n - 1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \Rightarrow U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $U_n \leq \frac{3}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

d) (U_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$

elle est donc convergente

soit $\ell = \lim_{n \to +\infty} U_n$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{3}{2}$

d'où $\frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{3}{2}$

EX 38 :

$f(x) = tgx$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

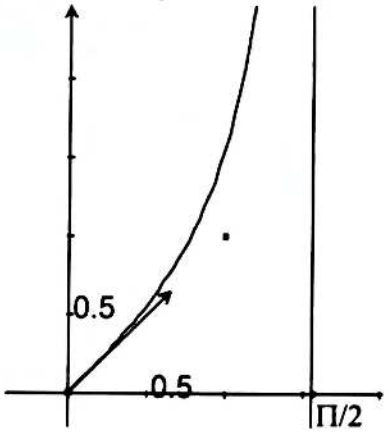
1) a) f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x) = 1 + tg^2 x > 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} tgx = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$

$f'_d(0) = 1$: le coefficient directeur de la tangente à (ζ_f) au point d'abcisse 0



b) soit $\varphi(x)=tgx-x$ $\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$\varphi'(x)=tg^2x\geq 0$

φ est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$x\geq 0\Rightarrow\varphi(x)\geq 0\Rightarrow tgx-x\geq 0\Rightarrow tgx\geq x$

2) a) on pose $h(x)=tgx-2x$ $\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h'(x)=tg^2x-1$

x	0		π/4		π/2
h'(x)		-	0	+	
h(x)	0	↘	1-π/2	↗	+∞

* h est continue et strictement décroissante

sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ d'où $h\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right[\right)=\left]1-\frac{\pi}{2},0\right]$

$0\in\left]1-\frac{\pi}{2},0\right]$ d'où il existe un unique réel

$\beta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ tel que : $h(\beta)=0$

or $h(0)=0\Rightarrow\beta=0$

* $h\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$

$0\in\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$

d'où il existe un réel $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ tq : $h(\alpha)=0$

comme h est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

alors α est unique

conclusion : l'équation : $h(x)=0\Leftrightarrow tg(x)=2x$

admet 0 et α comme seules solutions dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

* $h\left(\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3},+\infty\right[$

$0\in\left]\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3},+\infty\right[\Rightarrow\alpha\in\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow\alpha\geq\frac{\pi}{3}$

b) $h(x)=tgx-2x$

x	-∞		α		π/2
h(x)	0	-	0	+	‖

3) $\begin{cases}U_0=\frac{\pi}{3}\\ U_{n+1}=\varphi(U_n)\end{cases}$

a) * pour n=0 $\quad 0\leq U_0=\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{3}$

* supposons que : $0\leq U_n\leq\frac{\pi}{3}$

montrons que : $0\leq U_{n+1}\leq\frac{\pi}{3}$

$0\leq U_n\leq\frac{\pi}{3}\Rightarrow\varphi(0)\leq\varphi(U_n)\leq\varphi(\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow 0\leq U_{n+1}\leq\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\Rightarrow 0\leq U_{n+1}\leq\frac{\pi}{3}$

conclusion : $0\leq U_n\leq\frac{\pi}{3}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

b) d'aprés 2) b)

$U_n\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow h(U_n)\leq 0\Rightarrow tgU_n-2U_n\leq 0$

$\Rightarrow tgU_n-U_n\leq U_n\Rightarrow U_{n+1}\leq U_n$

d'où (U_n) est décroissante

c) (U_n) décroissante et minorée par 0

elle est donc convergente : soit ℓ sa limite

$\ell=\varphi(\ell)\Leftrightarrow tg\ell=2\ell\Leftrightarrow\ell=0$ car $\ell\leq\frac{\pi}{3}$

EX 39 :

$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad (E_n) : x^2 + x^3 = n$

1) on pose : $f_n(x) = x^2 + x^3 - n$

$f_n'(x) = 2x + 3x^2$

x	$-\infty$	-2/3	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	0	- 0	+
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{4}{27} - n$	↘ -n ↗	$+\infty$

* dans l'intervalle $]-\infty,0]$ f_n admet le réel $(\frac{4}{27} - n)$ comme maximum absolu

$\Rightarrow f_n(x) \le \frac{4}{27} - n < 0 \quad \forall x \in]-\infty,0]$

d'où l'équation $f_n(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $]-\infty,0]$

* f_n est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

$\Rightarrow f_n([0,+\infty[) = [-n,+\infty[$

comme $0 \in [-n,+\infty[$

alors l'équation : $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0,+\infty[$

conclusion : l'équation (E_n) admet a_n comme unique solution

2) a) Remarquons que : $a_n \ge 0 \quad ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

a_n est solution de (E_n)

a_{n+1} est solution de (E_{n+1})

d'où $a_{n+1}^2 + a_{n+1}^3 = n+1$

$a_n^2 + a_n^3 = n$

$\Rightarrow (a_{n+1}^2 - a_n^2) + (a_{n+1}^3 - a_n^3) = 1$

$\Rightarrow (a_{n+1} - a_n)\left[a_{n+1} + a_n + a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2\right] = 1$

or a_n et a_{n+1} sont positifs d'où $a_{n+1} - a_n \ge 0$

$\Rightarrow a_{n+1} \ge a_n$ d'où (a_n) est croissante

b) supposons que (a_n) est majorée

comme (a_n) est croissante

alors (a_n) converge vers un réel ℓ

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n^2 + a_n^3 = \ell^2 + \ell^3$

or $a_n^2 + a_n^3 = n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} n = \ell^2 + \ell^3$ (absurde)

d'où (a_n) n'est pas majorée

c) (a_n) est croissante et non majorée

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

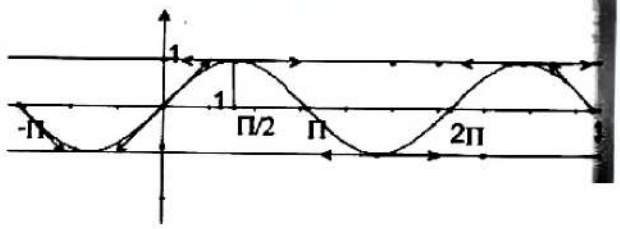
EX 40 :

I / f(x)=sinx f: impaire de période 2π

1) a) $f'(x) = \cos x$

$D_E = [0,\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f'(x)	2 +	0	- 0
f(x)	0 ↗	1	↘ 0



b) A(a,f(a)) B(b,f(b))

supposons que : a<b

le coeficient directeur de (AB) est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

d'après le théorème des accroissements finis :

il existe un réel $c \in]a,b[$ tq: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

or $f'(c) = \cos c \Rightarrow -1 \le f'(c) \le 1$

$\Rightarrow -1 \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le 1$

II / g(x)=sin(sinx)

1) a) $\forall x \in D_g = \mathbb{R}$

on a : $(x+2\pi) \in D_g$

$g(x+2\pi) = \sin(\sin(x+2\pi)) = \sin(\sin x) = g(x)$

d'où 2π est une période de g

b) $\forall x \in D_g = \mathbb{R}$ on a : $(-x) \in D_g$

$g(-x) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -g(x)$

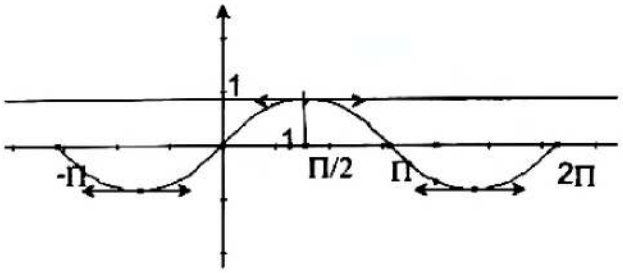
d'où g est impaire

c) g'(x)=cosx.cos(sinx) $x \in [0,\pi]$

$\sin x \in [0,1] \Rightarrow \cos(\sin x) > 0$

le signe de g'(x) est celui de : cosx

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)	2	+	0	-	0
f(x)	0	↗	Sin(1)	↘	0



EX 41 :

$D_f = \mathbb{R}$

I / $f(x) = x.\sqrt{|x^2 - x|}$

1)

x	-∞		0		1		+∞
x^2-x		+	0	-	0	+	

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x.\sqrt{x^2-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x.\sqrt{x^2-x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x} = +\infty$

(ζ_f) admet deux branches paraboliques

de direction celle de $(O,\vec{j})$

2) a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \sqrt{|x^2-x|} = 0$

d'où f est dérivable en 0 et f '(0)=0

b) $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x.\sqrt{x(x-1)}}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x.\sqrt{x(1-x)}}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^-} \frac{-x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = -\infty$

f non dérivable en 1

(ζ_f) admet une demi tangente verticale au

point d'abscisse 1

3) a) * pour $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$f(x) = x.\sqrt{x^2-x}$

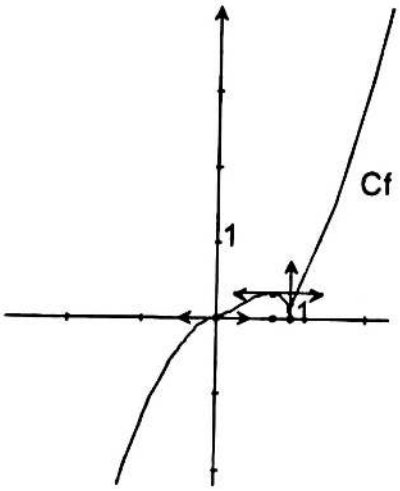
$f'(x) = \sqrt{x^2-x} + \frac{(2x-1).x}{2.\sqrt{x^2-x}} = \frac{x.(4x-3)}{2\sqrt{x^2-x}}$

* pour $x \in]0,1[$; $f(x) = x.\sqrt{x-x^2}$

$f'(x) = \sqrt{x-x^2} + \frac{(1-2x).x}{2.\sqrt{x-x^2}} = \frac{x.(3-4x)}{2\sqrt{x-x^2}}$

x	$-\infty$	0		$3/4$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	0	−	‖	+
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↘	0	↗ $+\infty$

b)



4)* g admet 0 comme minimum absolu

* g admet $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ comme maximum absolu

II / $g_n(x) = x^n\sqrt{x(1-x)}$

1) $n \geq 2$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^{n-1} \leq 1 \Rightarrow x^n \leq x$

$\Rightarrow x^n\sqrt{x(1-x)} \leq x\sqrt{x(1-x)} \Rightarrow g_n(x) \leq g_1(x)$

d'où (ζ_n) est au dessous de (ζ_1)

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g_n(x)-g_n(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{n-1}\sqrt{x(1-x)} = 0$

d'où g_n est dérivable à droite en 0 et $g_n'(0)=0$

* $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{g_n(x)-g_n(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^n\sqrt{x(1-x)}}{-(1-x)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{-x^n\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = -\infty$

g n'est pas dérivable à gauche en 1

b) la fonction : $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable sur $]0,1[$

g_n est dérivable sur $]0,1[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables

$$g_n'(x) = n.x^{n-1}.\sqrt{x(1-x)} + x^n\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)$$

$$= \frac{2x(1-x).n.x^{n-1} + x^n(1-2x)}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{x^n.[2n(1-x)+1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \frac{x^n.[2n+1-2(n+1)x]}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{x^n.\left[n+\frac{1}{2}-(n+1)x\right]}{\sqrt{x(1-x)}}$$

c)

x	0		$\frac{2n+1}{2(n+1)}$	
$g_n'(x)$		+	0	-
$g_n(x)$	0	↗	$g(\frac{2n+1}{2(n+1)})$	↘

g_n admet $g_n(\frac{2n+1}{2(n+1)})$ comme maximum local

en $\alpha_n = \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$

3) a)

$$g_n(\alpha_n) = \left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^n.\sqrt{\frac{1}{2(n+1)}}\left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right.$$

$$g_n(\alpha_n) = \left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^n.\frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

$$U_n = \left[\frac{2n+1}{2(n+1)}\right].\frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

* $U_n \geq 0 \quad ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

* $U_n = g_n(\alpha_n) \leq g_1(\alpha_n) \Rightarrow U_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$ d'aprés 4

d'où $0 \leq U_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$

b) $U_n \geq 0$ d'aprés a)

* d'aprés II/ 1)

$U_n = g_n(\alpha_n) \leq g_1(\alpha_n)$

d'où $0 \leq U_n \leq g_1(\alpha_n)$

c) $g_1(\alpha_n) = \alpha_n \cdot \sqrt{\alpha_n(1-\alpha_n)}$

$g_1(\alpha_n) = \frac{2n+1}{2(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$

d'où $\lim_{n\to+\infty} g_1(\alpha_n) = 0$

$0 \leq U_n \leq g_1(\alpha_n)$; $\lim_{n\to+\infty} g_1(\alpha_n) = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

EX 42 :

1) (E): $x^3 - 10x^2 - 1 = 0$

on pose $h(x) = x^3 - 10x^2 - 1$

$h(10) = -1$; $h(11) = 120$

h est continue sur $[10,11]$

$h(10) \times h(11) < 0$

d'où il existe un réel $a \in]10,11[$ tq $h(a) = 0$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = 3x^2 - 20x$

x	$-\infty$	0		20/3		$+\infty$
h'(x)		+ 0	−	0	+	
h(x)	$-\infty$	-1 ↗	↘	$\frac{-4027}{27}$	↗	$+\infty$

h est strictement croissante sur $\left[\frac{20}{3}, +\infty\right[$

d'où a est la seule solution de l'équation : $h(x) = 0$

dans $\left[\frac{20}{3}, +\infty\right[$

* dans l'intervalle $\left]-\infty, \frac{20}{3}\right[$

h admet (-1) comme maximum absolu

$\Rightarrow h(x) \leq -1$; $\forall x \in \left]-\infty, \frac{20}{3}\right[$

d'où l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $\left]-\infty, \frac{20}{3}\right[$

conclusion : a est la seule solution de (E)

2) 0 n'est pas une solution de (E)

dans $\mathbb{R}^*$: $(E) \Leftrightarrow x^3 = 10x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 10 + \frac{1}{x^2}$

3) $f(x) = 10 + \frac{1}{x^2}$; $x \in [10,+\infty[$

a) $f'(x) = \frac{-2}{x^3} < 0$ $\forall x \in [10,+\infty[$

f est continue et strictement décroissante sur $[10,+\infty[$

$f([10,+\infty[) = \left]\lim_{+\infty} f, f(10)\right] =]10 ; 10.01]$

b) $\begin{cases} U_0 = 10 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

Remarquons que : $U_n \geq 10$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$|f'(x)| = \frac{2}{x^3}$

pour $x \geq 10 \Rightarrow x^3 \geq 1000 \Rightarrow \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{500}$

f est dérivable sur $[10,+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{500}$

a et $U_n \in [10,+\infty[$

d'aprés le théorème des inégalités des accroissements finis:

$$|f(U_n) - f(a)| \le \frac{1}{500}|U_n - a|$$

or $f(U_n)=U_{n+1}$ et $f(a)=a$ (d'aprés 2))

d'où $|U_{n+1} - a| \le \frac{1}{500}|U_n - a| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$|U_1 - a| \le \frac{1}{500}|U_0 - a|$$

$$|U_2 - a| \le \frac{1}{500}|U_1 - a|$$

.

.

$$|U_n - a| \le \frac{1}{500}|U_{n-1} - a|$$

multiplions membre à membre et simplifions on aura :

$$|U_n - a| \le (\frac{1}{500})^n \times |U_0 - a|$$

$$|U_n - a| \le (\frac{1}{500})^n \times |a - 10|$$

$a \in]10,11[$

d'où $|a-10| \le 1$

par suite : $|U_n - a| \le (\frac{1}{500})^n$

$$\Rightarrow U_n - (\frac{1}{500})^n \le a \le U_n + (\frac{1}{500})^n$$

$U_3 = 10,00998007$

$(\frac{1}{500})^n = 8 \times 10^{-9}$

$10,009980062 \le a \le 10,009980078$

d'où a=10,009980...